

# Numerische Strömungsmechanik mit Z88

Finite-Elemente-Analyse von Stokes-Strömungen

18. Bayreuther 3D-Konstrukteurstag

21. September 2016

Bayreuth

Max Geilen

Florian Hüter

Prof. Dr.-Ing. Frank Rieg

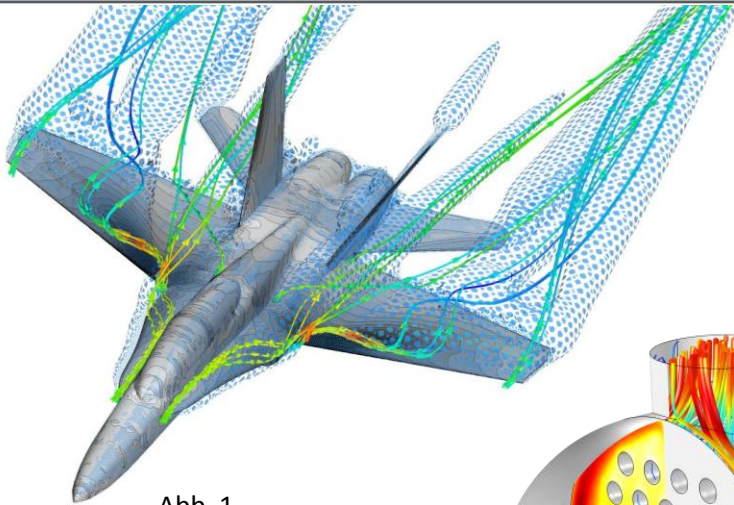


Abb. 1

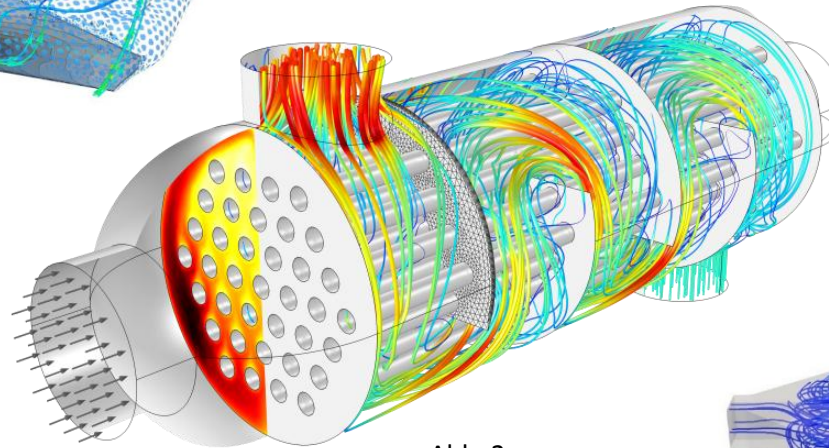


Abb. 2

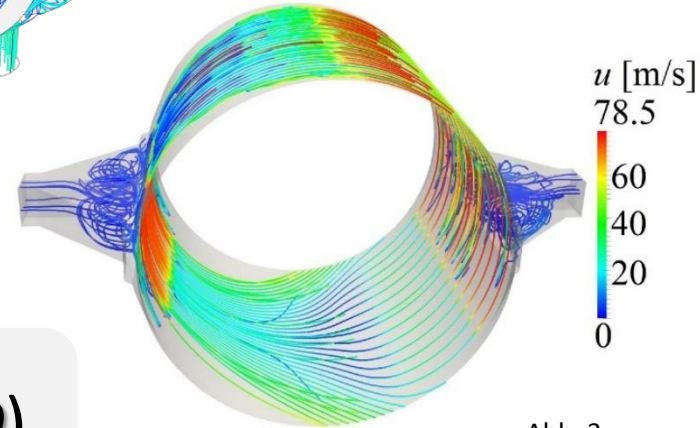


Abb. 3

**Computational *Fluid Dynamics* (CFD)**

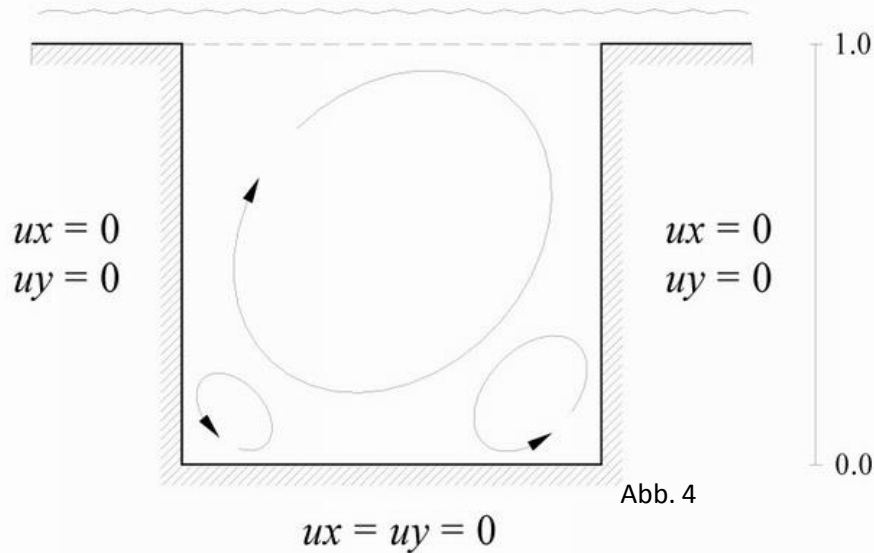


- Theoretische Grundlagen
- Schwerpunkt: Stokes'sche Strömungen
- Exkurs: Navier-Stokes-Gleichungen
- Mathematische Schwierigkeiten
- Möglicher Lösungsansatz
- Validierung am Benchmark-Problem

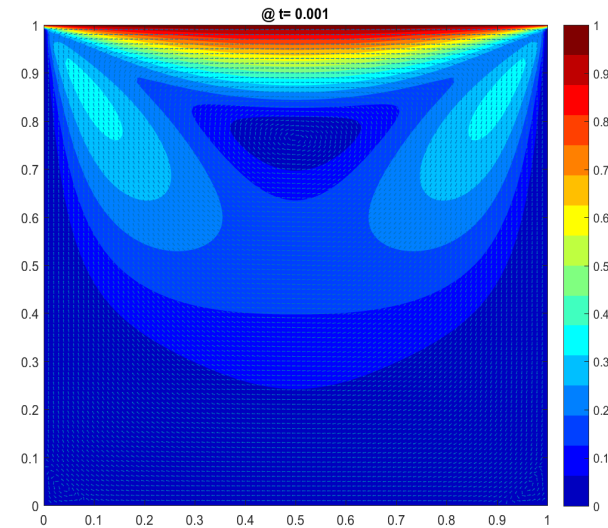


### Benchmark-Problem:

$$ux = 1, uy = 0$$



### FDM: Geschwindigkeitsfeld



### Klassifizierung der Strömung:

- Laminar,  $Re \ll 1$
- Inkompressibel
- Newtonsches Material
- Isotherm



Massenerhaltung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Impulserhaltung:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_{bi}$$

$$\tau_{ij} = \frac{1}{2} \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

*hier nur stationär !*

Lineares partielles Differentialgleichungssystem:

- zwei gekoppelte PDGLen
- zwei Unbekannte:  $\vec{u}$ ,  $p$



Lösung mithilfe  
der **FEM**



Impulserhaltung:

$$-\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} = f_{bi}$$

$$\mathbf{K} \vec{u} - \mathbf{D}^T \vec{p} = \vec{R}$$

Massenerhaltung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

$$-\mathbf{D} \vec{u} = \vec{0}$$

lineares  
Gleichungs-  
system



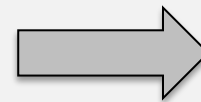
Mehrfeldformulierung:

Lagrange-Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

Eigenschaften:

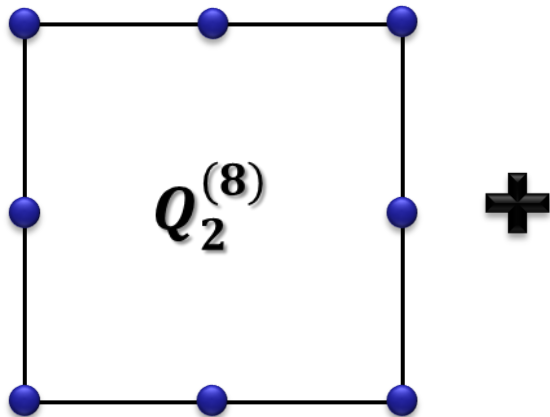
- Sattelpunktproblem
- Matrix: symmetrisch, aber indefinit



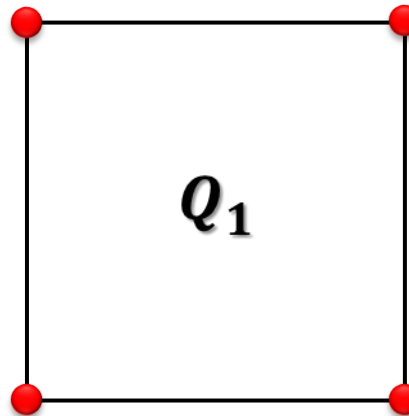
Eingeschränkte  
Solver-Auswahl



Geschwindigkeit

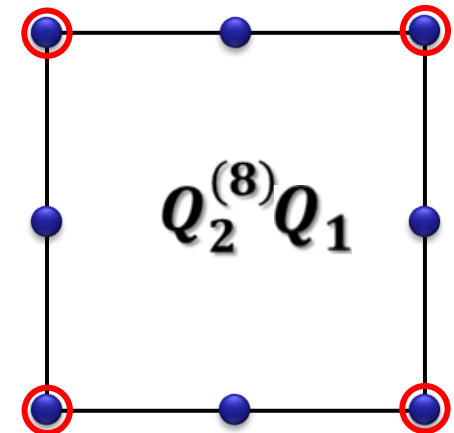


Druck



=

Hybridelement



LBB-Bedingung:

**Nicht alle Elementtypen dürfen  
miteinander kombiniert werden !**



**Eingeschränkte  
Element-Auswahl**

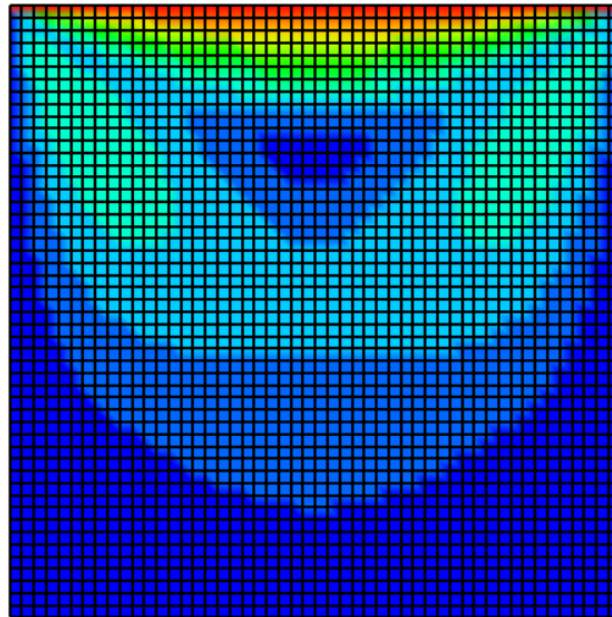
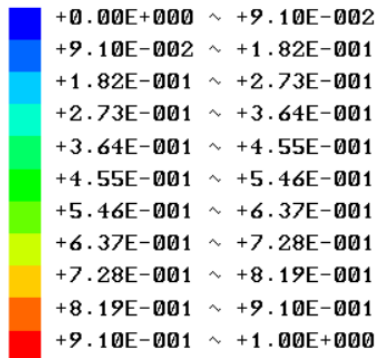




### Vergleichsrechnung

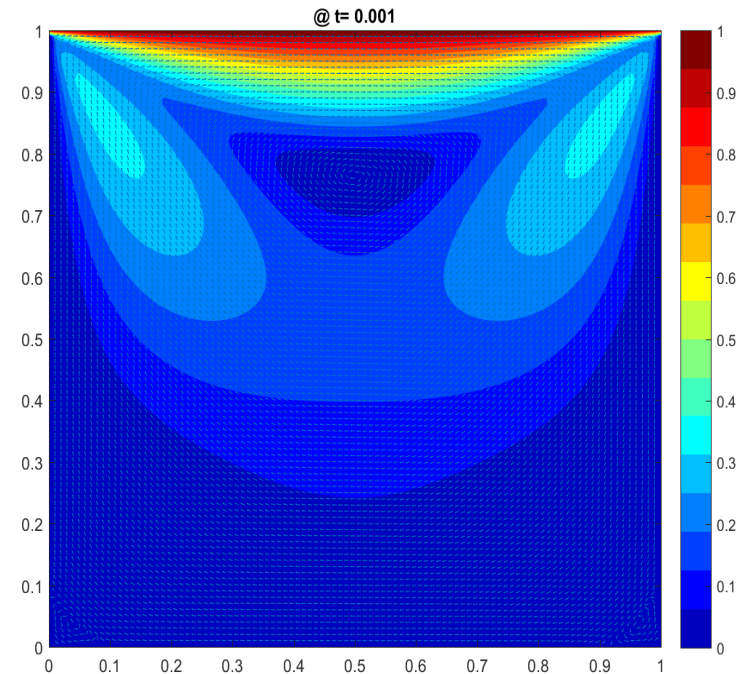
## Stationäre Lösung des Geschwindigkeitsfeldes

**288:  $Q_2^{(8)} Q_1$ -Elemente**



Netz: 50x50

**Matlab: FDM**





### Ergebnisse entlang charakteristischer Linien

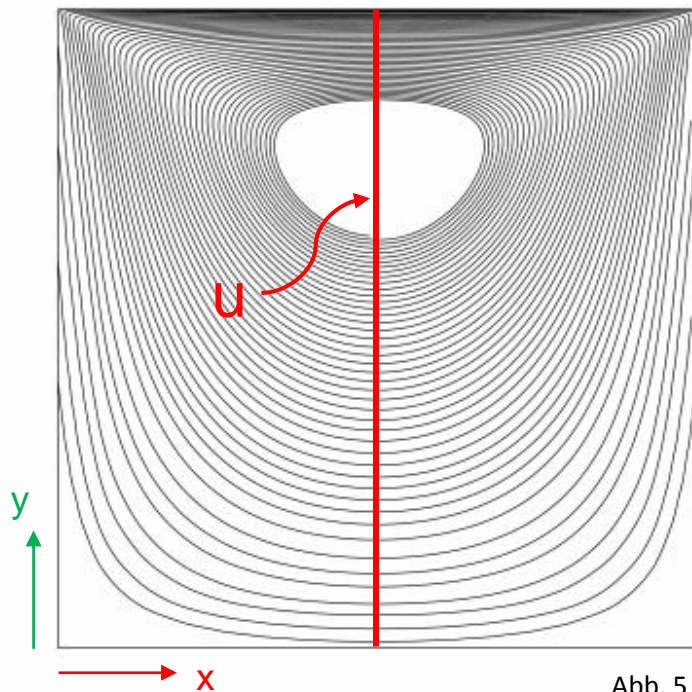
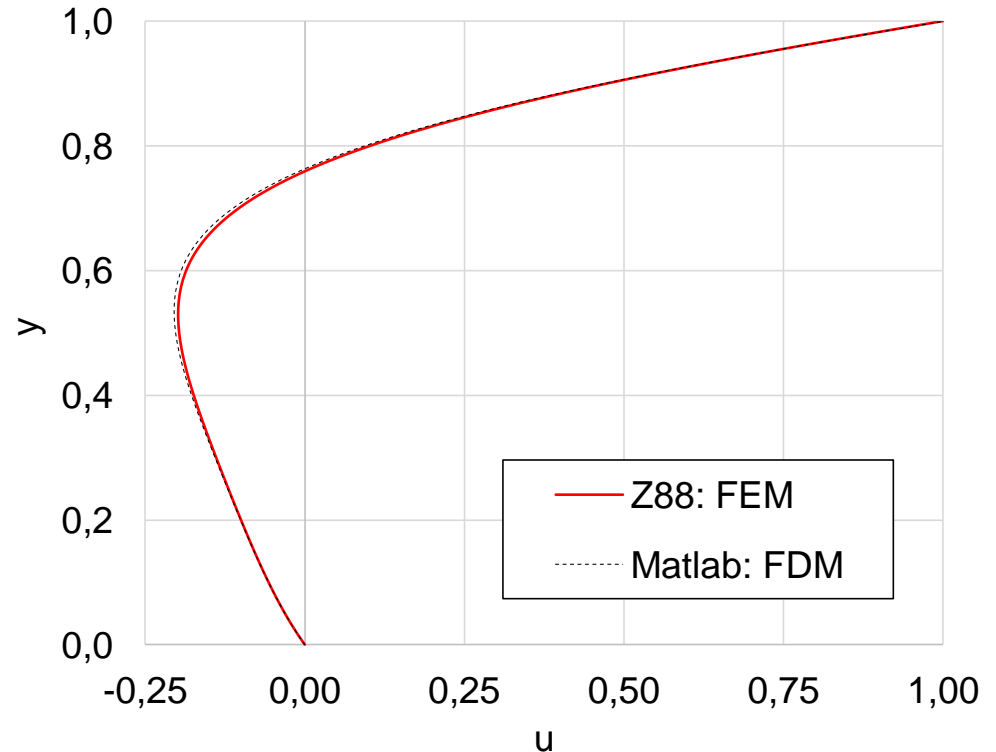


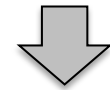
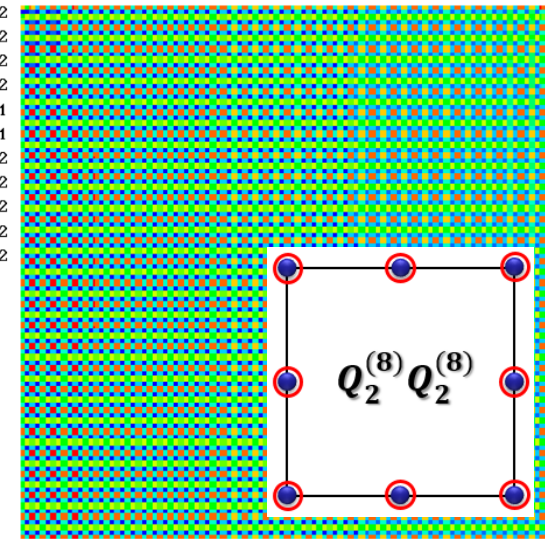
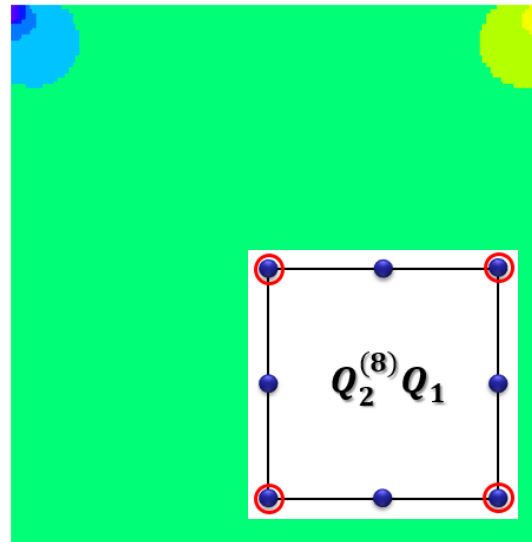
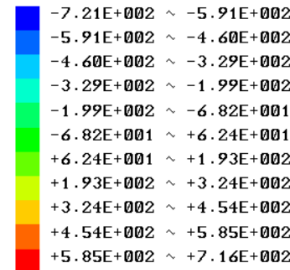
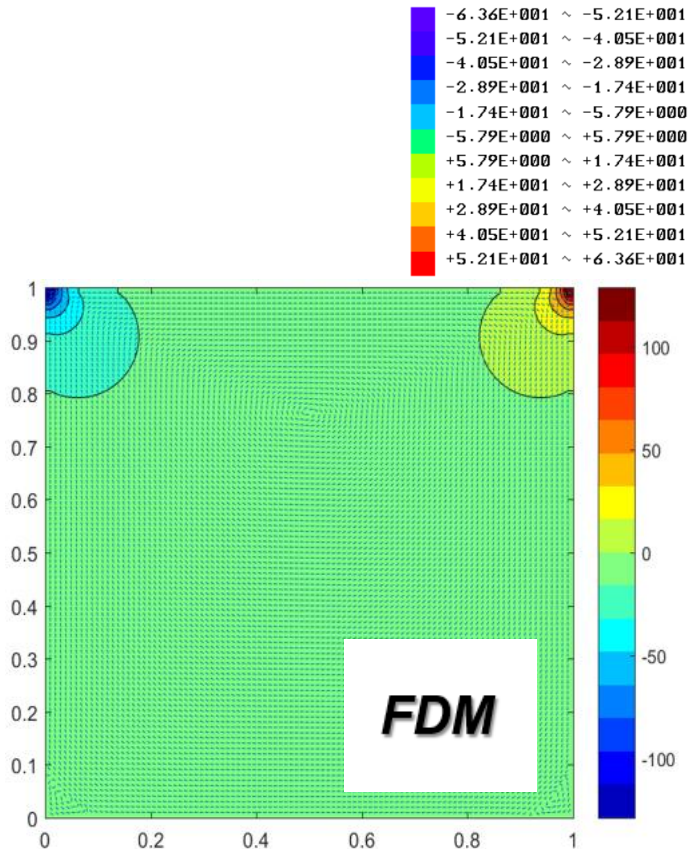
Abb. 5



**Fazit: gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse**



Ergebnisse für das Druckfeld:



### Checkerboard-Effekt

- LBB-Bedingung verletzt
- Instabilität im Druck
- Geschwindigkeit korrekt



Massenerhaltung:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$$

Impulserhaltung:

$$\rho \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j \rho u_i) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_{bi}$$

Konvektionsterm

- Nichtlinearität
- Instabilitäten im Geschwindigkeitsfeld

Druckgradient

- zwei Unbekannte gleichzeitig zu lösen
- Instabilität im Druck



Stabilisierungsverfahren



$$\text{CBS} = \text{CGP} + \text{FSM}$$

Characteristic **G**alerkin **P**rocedure

Fractional **S**tep **M**ethod



Konvektions-  
Stabilisierung



Druck-  
stabilisierung

Verfahrensvarianten:

- Split A
- Split B
- Single Step Version

# Characteristic-Based Split (CBS)-Algorithmus

## Single Step Version (SSV)



je Zeititeration zwei Schritte:

Stabilisierungsterme

Schritt 1:

$$\frac{\Delta U_i}{\Delta t} = \left[ -\frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + f_{bi} + \frac{\Delta t}{2} u_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} (u_j U_i) + \frac{\partial p}{\partial x_i} - f_{bi} \right) \right]^n$$



Geschwindigkeit berechnen



Konvektions-  
stabilisierung

Schritt 2:

$$-\frac{1}{c^2} \frac{\Delta p}{\Delta t} = \left[ \frac{\partial U_i}{\partial x_i} - \Delta t \frac{\partial^2 p}{\partial x_i^2} \right]^n$$



Druck-  
stabilisierung



Druck ermitteln



Klassischer Diskretisierungsansatz führt zu:

CBS-SSV-  
Gleichungssystem:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & -\mathbf{D}^T \\ -\mathbf{D} & -\frac{\Delta t}{\rho} \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{R} \\ \vec{0} \end{bmatrix}$$

Druckstabilisierung

Eigenschaften:

- Matrix immer noch indefinit
- LBB-Bedingung wird aufgehoben



# Characteristic-Based Split (CBS)-Algorithmus

Wahl des Elementansatzes



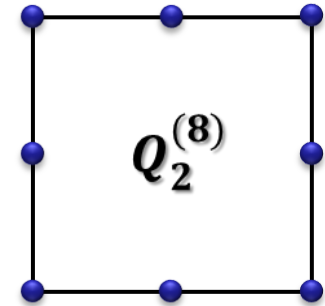
LBB-Bedingung aufgehoben:

**Alle Elementtypen dürfen  
miteinander kombiniert werden!**

**Insbesondere auch  
Elemente aus Mechanik**

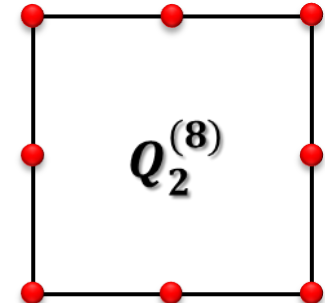
Druck als zusätzliche  
Geschwindigkeitskomponente

Geschwindigkeit



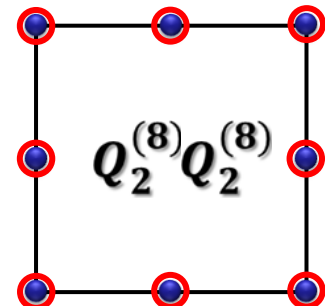
+

Druck



=

Hybridelement



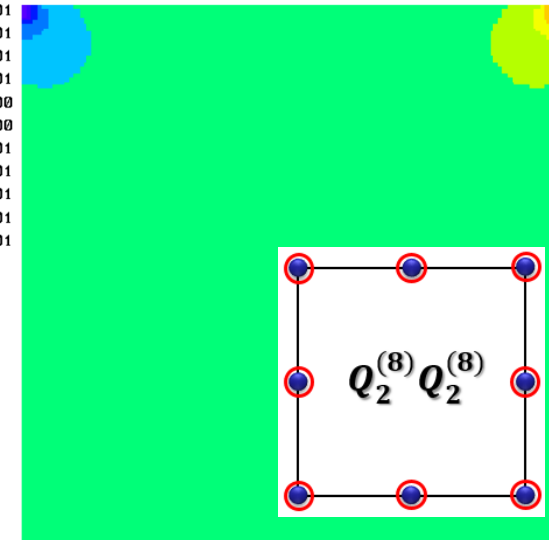
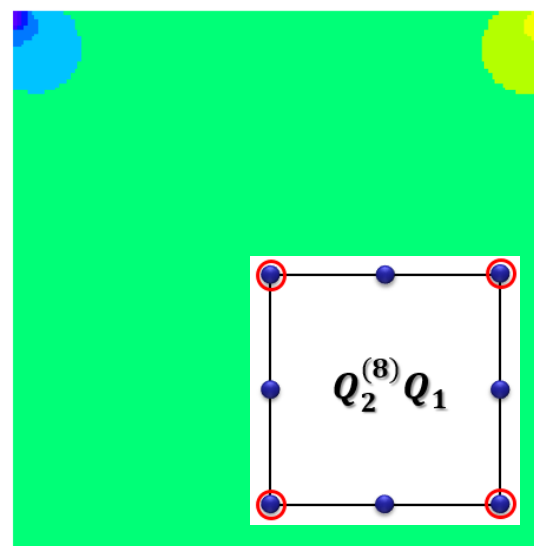
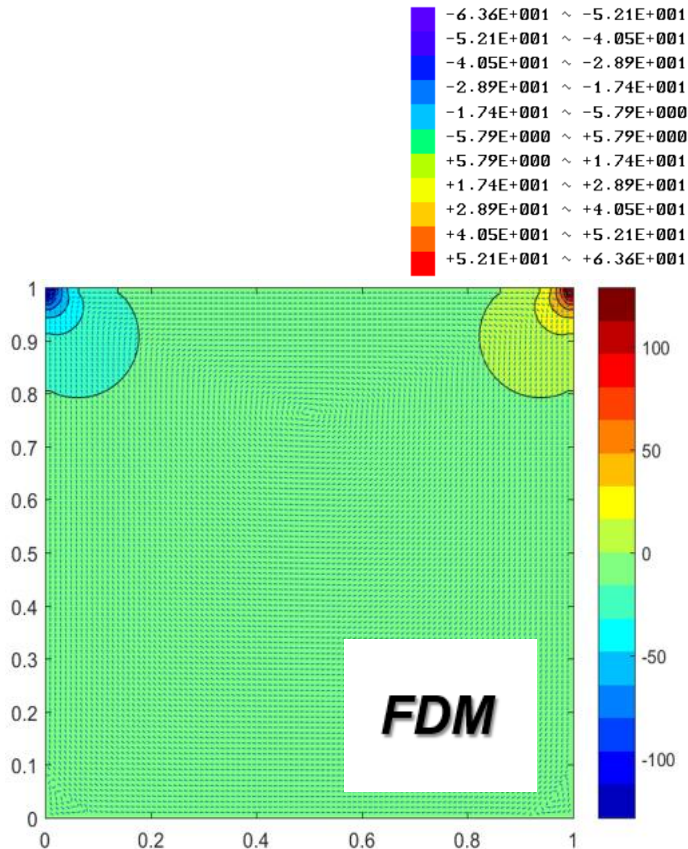


# Characteristic-Based Split (CBS)-Algorithmus

## Simulationsergebnisse



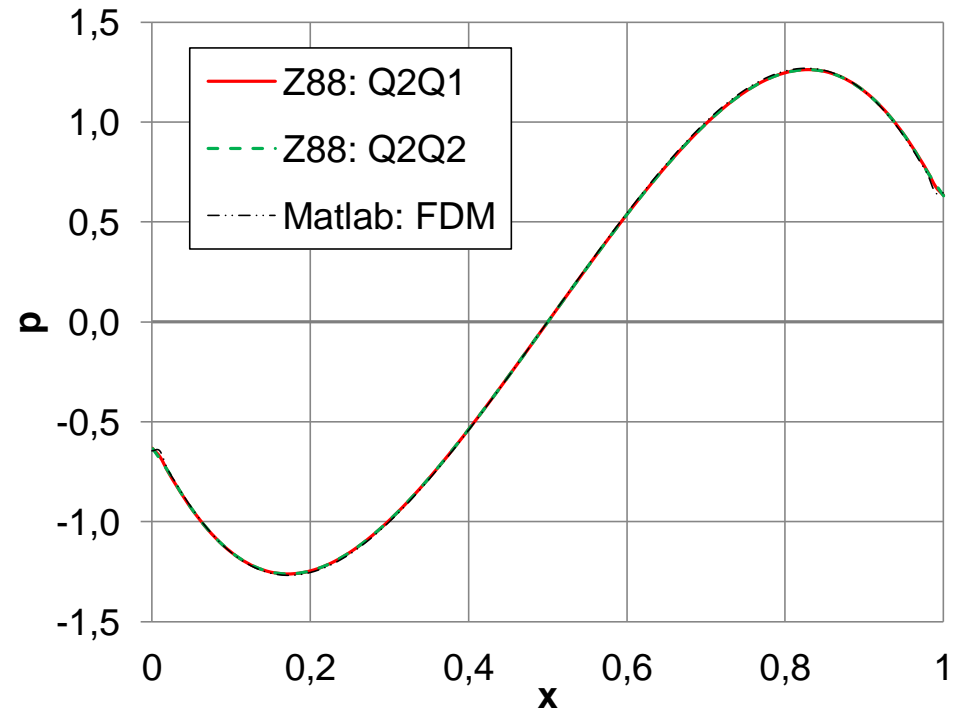
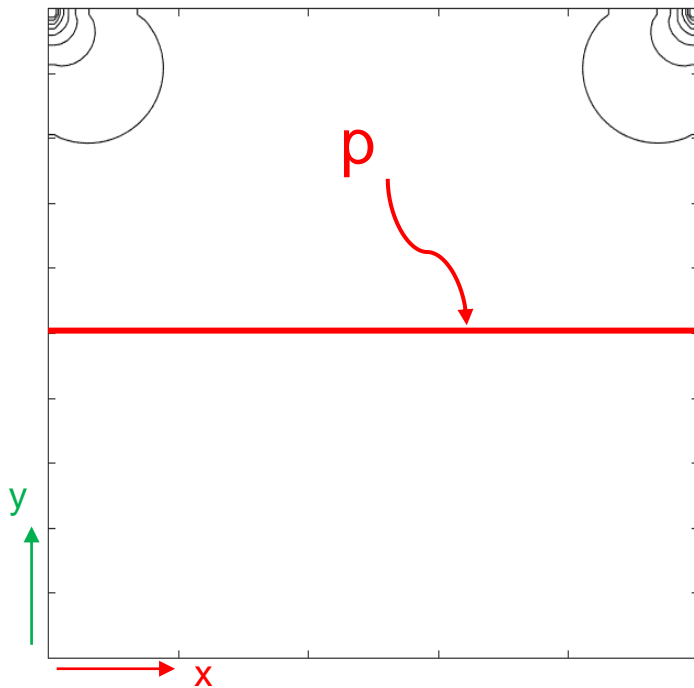
Ergebnisse für das Druckfeld:



**Numerische Lösung  
für das Druckfeld  
jetzt STABIL !**



### Ergebnisse entlang charakteristischer Linien



**Fazit: sehr gute Übereinstimmung der Simulationsergebnisse**

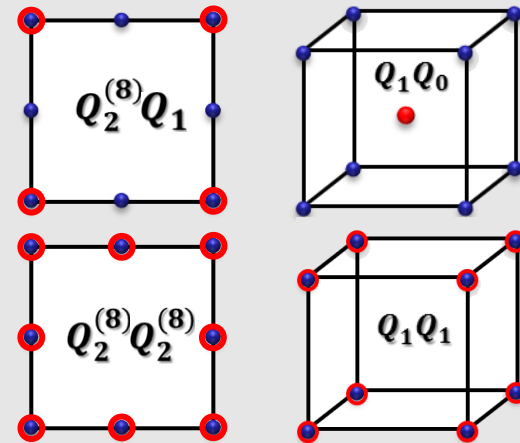


## Numerische Strömungsmechanik: FEM

- Mathematisch anspruchsvoll
- Hybridelementansatz
- Stabilitätsprobleme
- CBS-Algorithmus

## Stokes-Strömung: Programme

- Lagrange-Ansatz:
- CBS-Ansatz:





## Visualisierung :

- Vektorfeld
- Stromlinien

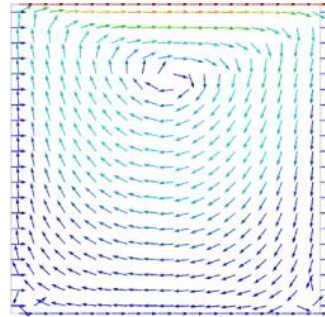


Abb. 6

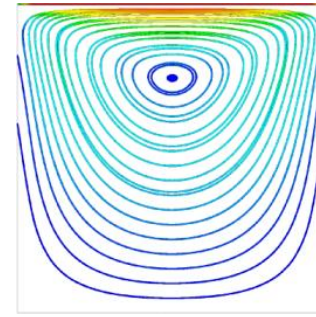
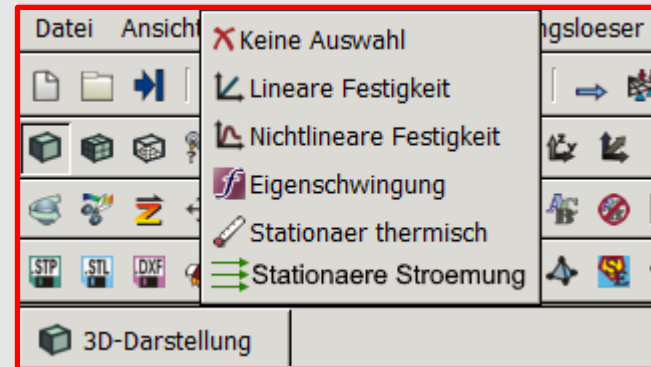


Abb. 7

## Eigenständiges CFD-Modul:

- in Z88Aurora
- analog zu z88thermo



# Numerische Strömungsmechanik mit Z88



Abb. 8



Abb. 1

[http://www.cd-adapco.biz/sites/default/files/F18\\_sized.jpg](http://www.cd-adapco.biz/sites/default/files/F18_sized.jpg), aufgerufen am 28.08.2016

Abb. 2

<https://cdn.comsol.com/wordpress/2014/01/Flow-and-temperature-field-in-a-shell-and-tube-heat-exchanger.png>, aufgerufen am 28.08.2016

Abb. 3

<https://www.fh-muenster.de/maschinenbau/labore/waermetechnik/turbinengleitlager.php?p=7,9,4>, aufgerufen am 28.08.2016

Abb. 4

<http://www.nacad.ufrj.br/~rnelias/gallery/cavity.html>, aufgerufen am 28.08.2016

Abb. 5

[https://www.researchgate.net/figure/266472931\\_fig1\\_Fig-6-Lid-Driven-Cavity-problem-for-n-1-and-s-0-Adaptive-mesh-and-streamlines-The](https://www.researchgate.net/figure/266472931_fig1_Fig-6-Lid-Driven-Cavity-problem-for-n-1-and-s-0-Adaptive-mesh-and-streamlines-The), aufgerufen am 28.08.2016

Abb. 6

<http://www.openfoam.com/documentation/tutorial-guide/img/tutorial47x.png>, aufgerufen am 03.09.2016

Abb. 7

<http://www.openfoam.com/documentation/tutorial-guide/img/tutorial50x.png>, aufgerufen am 03.09.2016

Abb. 8

<http://baubiologie-eifel.de/assets/images/fragezeichen.jpg>, aufgerufen am 28.08.2016



Donea, J.; Huerta, A.: Finite Element Methods for Flow Problems. 1. Auflage. John Wiley & Sons. Chichester: 2013.

Geilen, M.; Hüter, F.; Rieg, F.: Die Finite-Elemente-Methode in der Strömungsmechanik - Mathematische Grundlagen, Implementierung und Evaluation von Stokes- und Potentialströmungen. Teamprojektarbeit Universität Bayreuth: 2016.

Reddy, J. N.; Gartling, D. K.: The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics. 3. Auflage. CRC Press. Boca Raton: 2010.

Rieg, F.; Hackenschmidt, R.; Alber-Laukant, B.: Finite Elemente Analyse für Ingenieure. 5. Auflage. Carl Hanser Verlag. München: 2014.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L.; Nithiarasu, P.: Finite Element Method for Fluid Dynamics. 7. Auflage. Elsevier. Oxford: 2014.